Вестник Тюменского государственного университета.
Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2015. Том 1. № 2(2). 104-111

© **А. Д. НИЗАМОВА, В. Н. КИРЕЕВ, С. Ф. УРМАНЧЕЕВ**
Институт механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН
said@anrb.ru

УДК 532.5.013.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ ТЕРМОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ *

ON STABILITY OF THERMOVISCOUS LIQUIDS LAMINAR FLOW

Рассмотрена задача о влиянии температурной зависимости вязкости жидкости на устойчивость ламинарного режима течения в плоском канале с неоднородным температурным полем. Получены аналитические выражения, описывающие профили скорости в невозмущенном состоянии для линейной и экспоненциальной зависимостей вязкости от температуры. Получена система двух обыкновенных дифференциальных уравнений для амплитуд возмущений скорости и температуры, которая в случае изотермического течения может быть сведена к классическому уравнению Орра-Зоммерфельда. Численно исследованы спектры собственных значений для ламинарных течений с различными зависимостями вязкости жидкости от температуры. Обнаружены значительные различия между спектрами собственных значений для течения термовязкой жидкости и жидкости с постоянной вязкостью. Показано, что учет температурной зависимости вязкости жидкости оказывает существенное влияние на устойчивость ламинарного течения жидкости.

The problem of the influence of temperature dependence of viscosity on stability of laminar liquid flows in a plane channel with non-uniform temperature field is considered. The analytical expressions of undisturbed velocity profiles for plane non-isothermal fluid flows with linear and exponential dependences viscosity on temperature have been derived. The system of two ordinary differential equations for perturbation amplitudes of velocity and temperature has been developed. In the case of isothermal flow, this system of ODE can be reduced to the classical Orr-Sommerfeld equation. The spectra of eigenvalues for laminar flows with different temperature dependences of viscosity have been studied numerically. The considerable differences between the spectra of eigenvalues for the flow of thermoviscous fluid and fluid with constant viscosity are discovered. Consideration of the temperature dependence on fluid viscosity affecting considerably stability of laminar flows is shown.

* *Исследование проведено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-97034), Программы фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН (ОЭ-12) и гранта для поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-2669.2014.1).*

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Гидродинамическая устойчивость, уравнение Орра−Зоммерфельда, температурная зависимость вязкости, спектральная задача.

KEY WORDS. Hydrodynamic stability, Orr-Sommerfeld equation, temperature dependence of viscosity, spectral problem.

Закономерности течения во многом определяются вязкостью жидкости. Как правило, задачи гидродинамики решаются в предположении постоянства физических свойств жидкости [1]. При этом следует отметить, что вязкость является тем параметром, который достаточно чувствителен к изменению температуры [2-3]. Большинство моделей, описывающих зависимость вязкости от температуры, имеют вид экспоненциально убывающих функций, которые называются моделями аррениусовского типа [3]. В работе [4] проведен достаточно подробный численный анализ влияния параметров температурной зависимости вязкости на режимы течения в плоских каналах. Дальнейшие усложнения моделей, включающие немонотонную зависимость вязкости от температуры, привели к еще большим отличиям параметров течения по сравнению с классическим случаем постоянной вязкости [5].

Задача об устойчивости ламинарного течения вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнением Орра−Зоммерфельда [1]:

$$\left[\varphi^{IV}-2k^2\varphi''+k^4\varphi\right]-ik\,\mathrm{Re}\left[(u_0-c)\cdot\left(\varphi''-k^2\varphi\right)-u_0''\varphi\right]=0, \qquad (1)$$

где $\varphi(y)$ — амплитуда возмущений скорости; $u_0(y)$ — скорость в невозмущенном состоянии; $k > 0$ — волновое число, $c = c_r + i \cdot c_i$ — скорость распространения возмущений (собственное значение); Re — число Рейнольдса; i — мнимая единица.

Уравнение Орра−Зоммерфельда справедливо для течения жидкости с постоянной вязкостью, а в качестве $u_0(y)$ обычно используют профиль течения Пуазейля следующего вида:

$$u_0(y) = 1 - y^2. \qquad (2)$$

Однако, если вязкость жидкости зависит от температуры, то, очевидно, скорость течения не может иметь профиль Пуазейля. В этом случае профиль скорости течения жидкости необходимо привести в соответствие с законом изменения вязкости. Далее будет рассмотрен вывод формул, описывающих профили скорости по сечению канала для различных видов зависимости вязкости от температуры.

Для того чтобы исключить влияние возможности возникновения конвекции на устойчивость ламинарного течения жидкости в канале, подогрев будем осуществлять только по верхней стенке. В противном случае система уравнений, соответствующих обобщенному уравнению Орра−Зоммерфельда, будет содержать дополнительное слагаемое с числом Грасгоффа и задача будет сведена к исследованию взаимодействия уже двух видов неустойчивостей.

Рассмотрим течение термовязкой жидкости в канале с неоднородным распределением температуры (рис. 1).

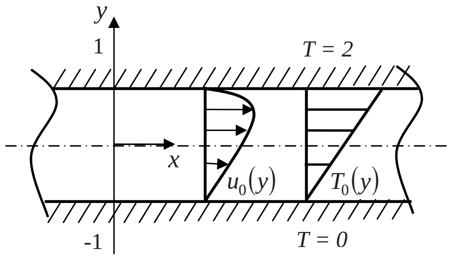

Рис. 1. Схема течения жидкости в канале

При рассмотрении течения в невозмущенном состоянии, система уравнений Навье−Стокса и сохранения энергии принимает вид:

$$\begin{cases} -\dfrac{dp_0}{dx}+\dfrac{1}{\mathrm{Re}}\dfrac{d}{dy}\left(\nu_0\dfrac{du_0}{dy}\right)=0, & (3)\\ \dfrac{d^2T_0}{dy^2}=0, & (4)\end{cases}$$

где $T_0 = T_0(y)$ и $v_0 = v_0(y)$ — распределения температуры и вязкости жидкости в невозмущенном состоянии, $dp_0/dx = const$ — заданный перепад давления.

Из уравнения (4) видно, что с учетом граничных условий температура в невозмущенном состоянии имеет следующий вид:

$$T_0(y) = 1 + y. \tag{5}$$

Уравнение (3) может быть решено аналитически для некоторых простых зависимостей вязкости от температуры или, в случае сложных зависимостей, численно.

Рассмотрим линейную зависимость вязкости от температуры:

$$v_L(T) = 1 — \alpha_L T\,,$$

где $\alpha_L < 0{,}5$ — параметр изменения вязкости, или, учитывая (5):

$$v_L(y) = 1 — \alpha_L(1 + y).$$

В этом случае уравнение (3) можно записать в виде:

$$[1-\alpha_L(1+y)]\frac{d^2u_0}{dy^2}-\alpha_L\frac{du_0}{dy}=\mathrm{Re}\frac{dp_0}{dx}\ .$$

Решение этого уравнения имеет вид (рис. 2):

$$u_0^L(y)=\frac{\mathrm{Re}}{\alpha_L}\frac{dp_0}{dx}\left[\frac{-2\ln(1-\alpha_L(1+y))}{\ln(1-2\alpha_L)}+1+y\right]. \tag{6}$$

При увеличении α_L параметра максимальное значение профиля скорости смещается от центра канала в область нагретой стенки.

Еще одна зависимость вязкости от температуры имеет экспоненциальный вид:

$$\nu_E(T) = \exp(-\alpha_E T),$$

где $\alpha_E > 0$ — параметр изменения вязкости, или, учитывая (5):

$$\nu_E(y) = \exp(-\alpha_E(1 + y)) .$$

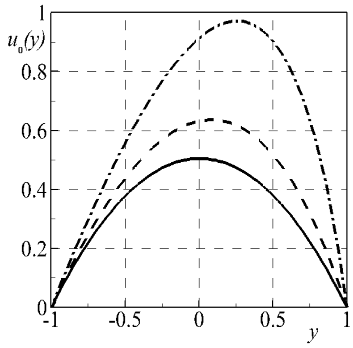

Рис. 2. Профили скорости: α_L = 0,01 (сплошная), α_L = 0,2 (штриховая), α_L = 0,4 (штрих-пунктирная)

Тогда уравнение (3) примет следующий вид:

$$\frac{d^2u_0}{dy^2} - \alpha_E \frac{du_0}{dy} = \mathrm{Re}\frac{dp_0}{dx}\exp(\alpha_E(1+y)),$$

его решением является функция (рис. 3):

$$u_0^E(y) = \frac{\mathrm{Re}}{\alpha_E}\frac{dp_0}{dx}\left[\frac{2exp(\alpha_E) - (1+exp(2\alpha_E)) \cdot exp(\alpha_E y)}{exp(-\alpha_E) - exp(\alpha_E)} - y \cdot exp(\alpha_E(1+y))\right]. \quad (7)$$

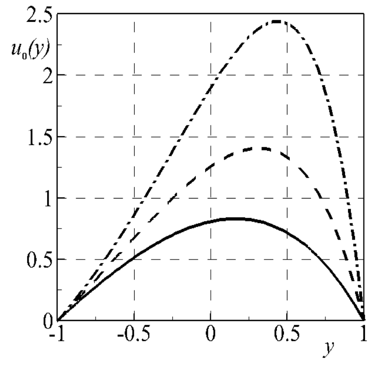

Рис. 3. Профили скорости: α_E = 0,679 (сплошная), α_E = 1 (штриховая), α_E= 1,5 (штрих-пунктирная)

Также как и на рис. 2 видно, что при увеличении параметра термовязкости α_E максимальное значение профиля скорости смещается от центра канала в область нагретой стенки. Это объясняется тем, что вязкость горячей жидкости меньше вязкости холодной жидкости.

Таким образом, получены аналитические зависимости профиля скорости в невозмущенном состоянии, которые будут использованы при решении задачи об устойчивости течения термовязкой жидкости в канале с неоднородным распределением температуры.

Далее рассмотрена задача об исследовании устойчивости течения термовязкой жидкости в плоском канале с неоднородным распределением температуры. После соответствующих преобразований уравнений исходной модели эта задача может быть сведена к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \nu_0 \cdot \left[\varphi^{IV} - 2k^2\varphi'' + k^4\varphi\right] - ik\,\mathrm{Re}\left[(u_0 - c)\cdot\left(\varphi'' - k^2\varphi\right) - u_0''\varphi\right] + \\ \qquad + 2\nu_0' \cdot \left(\varphi''' - k^2\varphi'\right) + \nu_0''\varphi'' - ik\left[\nu_0' \cdot \beta'' + \nu_0'' \cdot \beta' + \nu_0''' \cdot \beta\right] = 0, & (8) \\ \left(\theta'' - k^2\theta\right) - ik\mathrm{Pe}(u_0 - c)\theta - \mathrm{Pe}\varphi T_0' = 0, & (9) \end{cases}$$

где $\theta(y)$ — амплитуда возмущения температуры; $T_0(y)$ и $\nu_0(y)$ — температура и вязкость в невозмущенном состоянии; Pe — число Пекле; $\beta = \theta \cdot u''_0$.

Граничные условия для системы уравнений (8-9):

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0,\ \varphi'(-1) = \varphi'(1) = 0,\ \theta(-1) = \theta(1) = 0. \tag{10}$$

Уравнение (8) содержит дополнительные слагаемые, характеризующие изменение как температуры, так и вязкости по сечению канала. Если принять, что течение изотермическое, то уравнение (8) упрощается и сводится к классическому уравнению Орра–Зоммерфельда.

Задача на собственные значения для системы уравнений (8-9) рассмотрена как модифицированное уравнение Орра–Зоммерфельда для термовязкой жидкости с граничными условиями (10) и соответствующими соотношениями (7). Ее численное решение, основанное на использовании спектрального метода, позволило определить собственные значения и соответствующие собственные функции.

Спектры собственных значений модифицированного уравнения Орра–Зоммерфельда для нескольких значений параметра термовязкости α_E представлены на рис. 4. Анализ полученных результатов показывает, что при сделанных предположениях спектр собственных значений при малых значениях параметра α_E (рис. 4 а) качественно соответствует спектру собственных значений классического уравнения Орра–Зоммерфельда [6-10]. Собственные значения приближаются к реальной оси, группируясь в одну вертикальную ветвь, и, затем, делятся на две отдельные ветви: левую и правую. При увеличении значения параметра m спектр собственных значений значительно изменяется: для достаточно больших значений параметра α_E нижняя вертикальная ветвь делится на несколько отдельных ветвей (рис. 4 с). Кроме того, существует одно собственное значение с положительной мнимой частью (рис. 4 б, в), что соответствует неустойчивому режиму течения при выбранных значениях числа Рейнольдса и волнового числа.

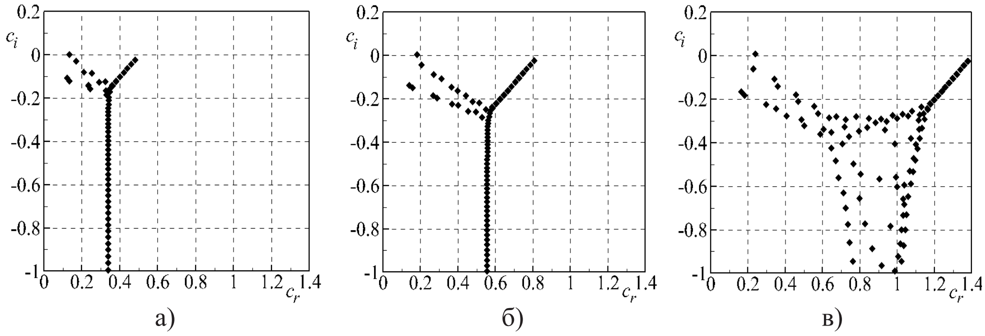

Рис. 4. Спектры собственных значений для α_E = 0,01 (а), α_E = 0,5 (б), α_E = 1 (в). Re = 10000, k = 1

Зависимость критического числа Рейнольдса от параметра представлена на рис. 5. Очевидно, что немонотонная зависимость критического числа Рейнольдса при увеличении параметра α_E (рис. 5, сплошная линия) связана с несоответствием между распределениями температуры и поля скорости: зависимость вязкости от температуры влияет на профиль скорости, который отличается от профиля Пуазейля. Если же скорость течения имеет модифицированный термовязкий профиль (7), тогда критическое число Рейнольдса монотонно убывает при увеличении значения параметра α_E (рис. 5, штриховая линия). Таким образом, влияние температурного фактора на уменьшение критического числа Рейнольдса оказалось весьма значительным и, кроме того, в большей мере способствует описанию большинства реальных значений экспериментальных данных. В этой связи уместно вспомнить, что критическое число Рейнольдса при решении классического уравнения Орра–Зоммерфельда равно Re_c=5772,22, что существенно превышает известные экспериментальные данные по определению условий перехода ламинарного режима течения в турбулентный режим. Влияние деформации формы профиля скорости на характеристики устойчивости отмечалось еще авторами широко известной монографии [11].

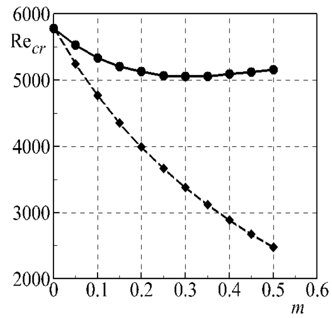

Рис. 5. Зависимости критического числа Рейнольдса от параметра при использовании профиля Пуазейля (сплошная) и термовязкого (штриховая) профиля скорости

На рис. 6 представлены области неустойчивости течения термовязкой жидкости с профилем скорости (7) для различных параметров α_E. По данному рисунку видно, что при увеличении параметра α_E критическое число Рейнольдса уменьшается.

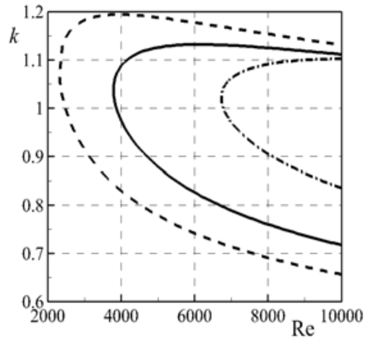

Рис. 6. Области неустойчивости течения термовязкой жидкости $\alpha_E = 1$ (штриховая), $\alpha_E = 0,679$ (сплошная), $\alpha_E = 0,3$ (штрих-пунктирная)

Таким образом, следует сделать заключение, что при анализе устойчивости течения реальных жидкостей учет изменения физических параметров от температуры очень важен для обеспечения большего соответствия экспериментальным данным и накопленному опыту.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волновое течение пленок жидкости // Новосибирск: ВО «Наука», 1992. С. 68-71.

2. Лейбензон Л. С. К вопросу о теплопередаче в нефтепроводных трубах // Собрание трудов. Т. III. Нефтепромысловая механика. М.: Изд-во АН СССР, 1955. С. 250-295.

3. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975. 592 с.

4. Урманчеев С. Ф., Киреев В. Н. О влиянии температурной зависимости вязкости на течение жидкости // Нефтегазовое дело. 2004. № 2. С. 287-295.

5. Урманчеев С. Ф., Киреев В. Н. Установившееся течение жидкости с температурной аномалией вязкости // Доклады академии наук. 2004. Т. 396. № 2. С. 204-207.

6. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.

7. Скороходов С. Л. Численный анализ спектра задачи Орра–Зоммерфельда // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 10. С. 1672-1691.

8. Orszag S. A. Accurate solution of the Orr–Sommerfeld equation // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 50. Part 4. Pp. 689-703.

9. Низамова А. Д., Киреев В. Н., Урманчеев С. Ф. О влиянии зависимости вязкости от температуры на устойчивость течения жидкости. Уфа: Известия УНЦ РАН, 2014. № 4. С. 12-16.

10. Низамова А. Д. Влияние температурной зависимости вязкости на устойчивость плоскопараллельного течения жидкости // Уфа: Труды Института механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. Вып. 10 / под ред. С. Ф. Урманчеева. Уфа: Нефтегазовое дело, 2014.

11. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 368 с.

REFERENCES

1. Alekseenko, S. V., Nakoryakov, V. E., Pokusaev, B. G., Wave flow of liquid films // Novosibirsk: Nauka, 1992. Pp. 68-71 (in Russian).

2. Leibenzon, L. S. On heat transfer in oil pipelines // Moscow: Neftepromyslovaya mekhanika. 1955. Pp. 250-295 (in Russian).

3. Frenkel, Ya. I. Kinetic Theory of Liquids. Leningrad: Nauka, 1975. 592 p. (in Russian)

4. Urmancheev, S. F., Kireev, V. N. On the influence of temperature dependence of viscosity on fluid flow // Neftegazovoe delo. 2004. № 2. Pp. 287-295 (in Russian).

5. Urmancheev, S. F., Kireev, V. N. Steady flow of a fluid with an anomalous temperature dependence of viscosity // Doklady Physics. 2004. Vol. 396. №. 2. Pp. 204-207.

6. Drazin, P. G. Introduction to hydrodynamic stability // Cambridge University Press. 2002. 288 p.

7. Skorokhodov, S. L. Numerical analysis of the spectrum of the Orr-Sommerfeld problem // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2007. Vol. 47. № 10. Pp. 1672-1691 (in Russian).

8. Orszag, S. A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld equation // Journal of Fluid Mechanics. 1971. Vol. 50. Part 4. Pp. 689-703.

9. Nizamova, A. D., Kireev, V. N., Urmancheev, S. F. Influence of temperature dependence of viscosity on stability of liquid flows // Ufa: Izvestiya of RAS. 2014. № 4. Pp.12-16 (in Russian).

10. Nizamova, A. D. The influence of temperature dependence of viscosity on the stability of liquid flow in the plane channel // Ufa: Mavlutov Institute of Mechanics. 2014 (in Russian).

11. Goldshtik, M. A., Shtern, V. N. Hydrodynamic stability and turbulence // Novosibirsk: Nauka, 1977. 368 p. (in Russian).

Авторы публикации

Низамова Аделина Димовна — аспирант Института механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН

Киреев Виктор Николаевич — научный сотрудник Института механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, доцент, кандидат физико-математических наук

Урманчеев Саид Федорович — директор Института механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН, профессор, доктор физико-математических наук

Authors of the publication

Adelina D. Nizamova — Postgraduate, Institute of Mechanics, Ufa Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences

Victor N. Kireev — Research Associate, Institute of Mechanics, Ufa Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Associate Professor, Cand. Sci. (Phys.-Math.)

Said F. Urmancheev — Dr Sci. (Phys.-Math.) Professor, Mavlutov Institute of Mechanics of RAS, Director